Concours GIC session 2018

Composition : Physique 1 (mécanique, thermodynamique)

Durée : 4 Heures

Consignes pour les candidats	Merci de ne rien marquer sur le sujet. Pour chaque question de l'épreuve, une seule bonne réponse possible. Répondez sur la grille séparée qui comporte 55 questions (Q1 à Q55). Seules les grilles correctement remplies seront corrigées.

NB. : Dans cette épreuve, on demande d'indiquer, pour chaque question, la bonne réponse parmi celles qui sont proposées.

MECANIQUE

Partie I

On considère une plaque plane (P) homogène, d'épaisseur négligeable, en forme de triangle équilatéral ABC, de côté a et de hauteur h, de masse M. On note $\vec{z}$ la verticale descendante (figure 1).
On donne M = 300g, a = 15 cm.

On étudie deux mouvements de cette plaque.
- Une rotation autour d'un axe porté par un coté du triangle.
- Une rotation autour d'un axe *Gz*.

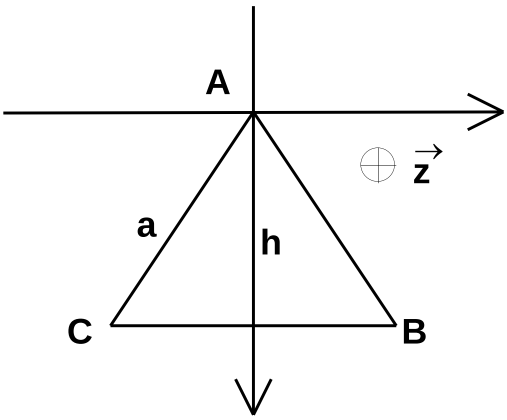


Figure 1

Étude préliminaire

Question 1) Déterminer la position du centre d'inertie G de la plaque (P). (AG en fonction de h).

A) $AG = \frac{1}{3}h$

B) $AG = \frac{1}{3}h^2$

C) $AG = \frac{2}{3}h$

D) $AG = \frac{3}{2}h$

E) $AG = \frac{2}{3}h^2$

Question 2) On donne le moment d'inertie *I(Ax)* de (P) par rapport à l'axe *Ax*, parallèle au côté BC et passant par A : $I(Ax) = \frac{Mh^2}{2}$. Déterminer en fonction de h, le moment d'inertie *J(AB)* de (P) par rapport à l'axe *AB*.

A) $J(AB) = \frac{M}{9}h^3$

B) $J(AB) = \frac{M}{6}h^2$

C) $J(AB) = \frac{2M}{3}h^2$

D) $J(AB) = \frac{3M}{2}h^2$

E) $J(AB) = \frac{M}{6}h^4$

Applications numériques

Question 3) Calculer *I(Ax)*

$A)$ $I(Ax) = 2{,}5.10^{-3}\ kg.m^2$

$B)$ $I(Ax) = 1{,}5.10^{-3}\ kg.m^3$

$C)$ $I(Ax) = 1{,}5.10^{-3}\ kg.m^2$

$D)$ $I(Ax) = 2{,}5.10^{-3}\ kg.m^4$

$E)$ $I(Ax) = 2{,}1.10^{-3}\ kg.m^2$

Question 4) Calculer J(AB)

$A)$ $J(AB) = 7{,}5.10^{-3}\ kg.m^3$

$B)$ $J(AB) = 8{,}4.10^{-4}\ kg.m^2$

$C)$ $J(AB) = 9{,}3.10^{-4}\ kg.m^2$

$D)$ $J(AB) = 8{,}4.10^{-3}\ kg.m^4$

$E)$ $J(AB) = 5{,}1.10^{-3}\ kg.m^2$

Question 5) Déterminer en fonction de h, le moment d'inertie *K(Gz)* de (P) par rapport à l'axe *Gz* passant par G et perpendiculaire au plan de la plaque. On donne le moment d'inertie *I(Az)* de (P) par rapport à l'axe *Az* :
$I(Az) = \frac{20Mh^2}{36}$.

A) $K(Gz) = \frac{M}{16}h^3$

B) $K(Gz) = \frac{7M}{9}h^2$

C) $K(Gz) = \frac{M}{9}h^4$

D) $K(Gz) = \frac{3M}{5}h^2$

E) $K(Gz) = \frac{M}{9}h^2$

Question 6) Calculer *K(GZ)*

$A)$ $K(Gz) = 5{,}5.10^{-3}\ kg.m^2$

$B)$ $K(Gz) = 7{,}8.10^{-4}\ kg.m^4$

$C)$ $K(Gz) = 3{,}5.10^{-5}\ kg.m^4$

$D)$ $K(Gz) = 5{,}6.10^{-4}\ kg.m^2$

$E)$ $K(Gz) = 5{,}6.10^{-4}\ kg.m^3$

Rotation autour d'un côté du triangle.

On suppose que la plaque est horizontale, suspendue par trois câbles verticaux, de longueur L constante (figure 2) reliés respectivement aux trois sommets du triangle, supposés de masse négligeable et sans torsion.
L = 10 cm.

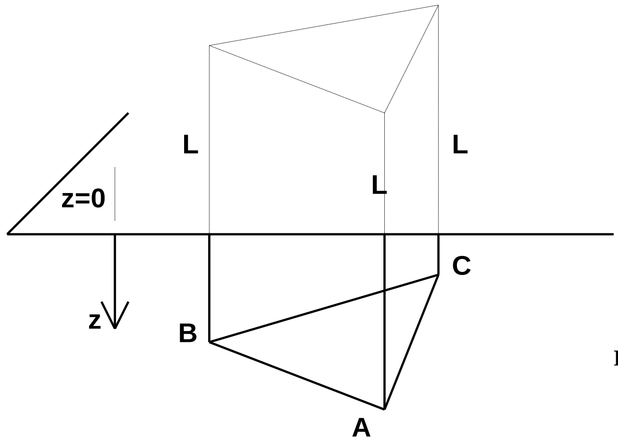


Figure 2

A l'instant t = 0, le câble relié à C est rompu de sorte que le triangle se met à tourner autour de l'axe AB que l'on supposera immobile et assurant une liaison parfaite. On note α l'angle du plan de (P) avec la verticale $\vec{z}$ et $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur supposée uniforme.

Question 7) Déterminer l'énergie mécanique de la plaque.

$$A)\quad E_m = \frac{Mh^2}{12}\dot{\alpha}^2 - Mg\frac{h}{3}cos\alpha$$
$$B)\quad E_m = \frac{Mh^2}{12}\dot{\alpha}^2 + Mg\frac{h}{2}cos\alpha$$
$$C)\quad E_m = \frac{Mh^2}{12}\dot{\alpha}^2 - Mg\frac{h}{3}sin\alpha$$
$$D)\quad E_m = \frac{Mh^2}{12}\dot{\alpha}^2 + Mg\frac{h}{2}sin\alpha$$
$$E)\quad E_m = \frac{Mh^2}{12}\dot{\alpha} - Mg\frac{h}{2}cos\alpha$$

Question 8) Trouver la relation entre la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ et l'angle α à tout instant.

$$A)\ \dot{\alpha}^2 = \frac{4g}{h}cos\alpha$$
$$B)\quad \dot{\alpha} = \frac{4g}{h}cos^2\alpha$$
$$C)\quad \dot{\alpha}^2 = \frac{4g}{h}sin\alpha$$
$$D)\quad \dot{\alpha} = \sqrt{\frac{4g}{h}}cos\alpha$$
$$E)\quad \dot{\alpha}^2 = \frac{4g}{9h}sin\alpha$$

Question 9) Calculer le module de l'accélération de G quand la plaque passe à la position verticale.

$$A)\quad a_G = \frac{4hg}{3}$$
$$B)\quad a_G = \frac{4hg}{7}$$
$$C)\quad a_G = \frac{5g}{3}$$
$$D)\quad a_G = \frac{4g}{3}$$
$$E)\quad a_G = \frac{9g}{2}$$

Question 10) Application numérique de l'accélération de G (g = 9,81 m.s^{-2}).

$$A)\quad a_G = 6{,}7\ m.s^{-2}$$
$$B)\quad a_G = 13{,}1\ m.s^{-2}$$

$$C)\quad a_G = 9{,}3\ m.s^{-2}$$
$$D)\quad a_G = 45{,}2\ m.s^{-2}$$
$$E)\quad a_G = 21{,}5\ m.s^{-2}$$

Mouvement de "vissage".

On revient au montage de la figure 2; à partir de la position verticale des câbles, on effectue un mouvement de "vissage " d'axe *Gz* c'est à dire que le triangle reste à tout moment dans un plan horizontal, le point G se déplaçant sur l'axe Gz vertical fixe et que toute droite liée à (P) tourne d'un même angle . Ce mouvement correspond à une rotation autour d'un axe *Gz*.

On note A_0 , B_0 , C_0 , G_0 les positions initiales des points A, B, C, G ; on note z = 0 le plan d'attache des câbles ($z(G_0) = L$); O est la projection de G_0 sur le plan z = 0 et on note θ l'angle $(\overrightarrow{G_0A_0}, \overrightarrow{GA})$ compté positivement autour de Oz.

Question 11) Ecrire la relation entre z(G) et l'angle θ traduisant que les fils ont une longueur constante.

$$A)\quad L^2 = z_G^2 + \left[\frac{4h}{3} sin(\theta)\right]^2$$
$$B)\quad L^2 = z_G^2 + \left[\frac{4h}{3} sin(2\theta)\right]^2$$
$$C)\quad L^2 = z_G^2 + \left[\frac{4h}{3} cos(\theta/2)\right]^2$$
$$D)\quad L^2 = z_G^2 + \left[\frac{4h}{3} cos(2\theta)\right]^2$$
$$E)\quad L^2 = z_G^2 + \left[\frac{4h}{3} sin(\theta/2)\right]^2$$

Question 12) Ecrire l'énergie cinétique de (P) en fonction de $\dot{z}$ et $\dot{\theta}$ et des constantes.

$$A)\quad E_c = \frac{1}{2}M\dot{z}_G^2 + \frac{Mh^2}{3}\dot{\theta}^2$$
$$B)\quad E_c = \frac{1}{4}M\dot{z}_G^2 + \frac{Mh^2}{9}\dot{\theta}^2$$
$$C)\quad E_c = \frac{1}{2}M\dot{z}_G^2 + \frac{Mh^2}{18}\dot{\theta}^2$$
$$D)\quad E_c = M\dot{z}_G^2 + \frac{Mh^2}{18}\dot{\theta}^2$$
$$E)\quad E_c = \frac{1}{6}M\dot{z}_G^2 + \frac{Mh^2}{12}\dot{\theta}^2$$

Question 13) Ecrire l'équation différentielle du mouvement dans l'hypothèse de petits mouvements.

$$A)\quad \ddot{\theta} + \frac{4g}{L}\theta = 0$$
$$B)\quad \ddot{\theta} + \frac{4g}{3L}\theta = 0$$
$$C)\quad \ddot{\theta} + \frac{4g}{L}\dot{\theta} = 0$$
$$D)\quad \ddot{\theta} + \frac{4g}{9L}\theta = 0$$
$$E)\quad \ddot{\theta} + \frac{2g}{3L}\theta = 0$$

Question 14) La résoudre en indiquant le type de mouvement.

A) Il s'agit d'un mouvement oscillatoire amorti
B) Il s'agit d'un mouvement apériodique
C) Il s'agit d'un mouvement parabolique

$D)\ Il\ s'agit\ d'un\ mouvement\ sinusoïdal$

$E)\ Il\ s'agit\ d'un\ mouvement\ vibratoire$

Question 15) Déterminer la période du mouvement.

$A)\ le\ mouvement\ n'admet\ pas\ de\ période$

$$B) \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{3L}{4g}}$$

$$C) \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{4g}{3L}}$$

$$D) \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{4g}}$$

$$E) \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{3L}{4g}}$$

Question 16) Application numérique : Calculer la période.

$A) \quad T = 3\ s$

$B) \quad T = 0\ s$

$C) \quad T = 0{,}9\ s$

$D) \quad T = 0{,}05\ s$

$E) \quad T = 316\ ms$

Partie II

Ce problème propose l'étude de quelques aspects mécaniques d'une technique utilisée en géophysique : la sismologie.

Etude du sismographe

Dans toute cette partie, la surface du sol sera considérée comme plane.

Un sismographe est un appareil destiné à enregistrer les vibrations du sol sous l'action d'un séisme. Le mouvement du sol sera décrit par une vibration verticale : $Z_S = Z_O cos\omega t$ par rapport à un niveau de référence $Z = 0$ dans un référentiel galiléen.

Le sismographe est constitué d'un support rigide de hauteur *h* auquel on suspend une masse *m* par l'intermédiaire d'un ressort sans masse, de raideur *k* et de longueur à vide ℓ_0. Le ressort prend alors une longueur ℓ_1 (Figure 3). La masse a un mouvement vertical amorti par un frottement fluide, le coefficient de frottement est noté λ.

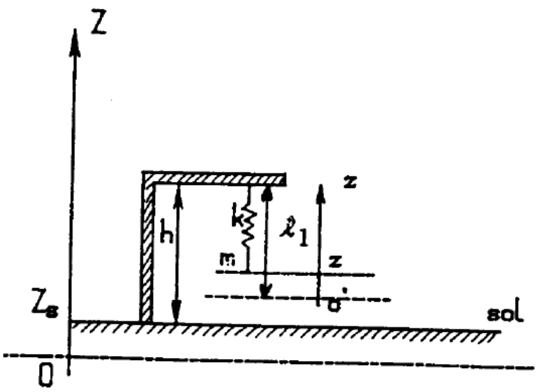


Figure 3

Question 17) Déterminer l'équation différentielle donnant le mouvement de la masse *m*, repérée par la cote *z(t)*.

$A) \quad m\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + kz = m\omega^2 Z_0 cos\omega t$

$B) \quad m\ddot{z} + \lambda\dot{z} + kz = mZ_0 cos\omega t$

$C) \quad m\ddot{z} + \lambda\dot{z} + kz = m\omega^2 Z_0 cos\omega t$

$D) \quad m\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + kz = mZ_0 cos\omega t$

$$E) \quad \ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \frac{k}{m}z = \omega^2 Z_0 cos\omega t$$

Question 18) Déterminer l'amplitude *A* du mouvement de la masse *m* en régime forcé.

$$A) \quad A = \frac{mZ_0\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\lambda\omega)^2}}$$

$$B) \quad A = \frac{mZ_0\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}}$$

$$C) \quad A = \frac{mZ_0\omega^2}{\sqrt{(k-2m\omega^2)^2+(\lambda\omega)^2}}$$

$$D) \quad A = \frac{4mZ_0\omega^2}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(2\lambda\omega)^2}}$$

$$E) \quad A = \frac{4mZ_0\omega^2}{\sqrt{(k-2m\omega^2)^2+(2\lambda\omega)^2}}$$

Question 19) L'utilisateur souhaite observer un mouvement dont l'amplitude soit, dans la mesure du possible, égale à l'amplitude du mouvement du sol. Comment doit-il choisir *m et k*, la pulsation ω étant fixée ?

$$A) \quad \frac{k}{m} \gg \omega$$

$$B) \quad \frac{k}{2m} \ll \lambda\omega$$

$$C) \quad \frac{k}{2m} \ll \omega$$

$$D) \quad \sqrt{\frac{k}{m}} \ll \omega$$

$$E) \quad \sqrt{\frac{k}{m}} \gg \omega$$

Question 20) Les fréquences de vibrations ν enregistrées étant dans la gamme de 1 à 10 Hz, quelle relation sur *m* et *k* obtient-on ?

$$A) \quad \frac{m}{k} \gg 39{,}5 \quad SI$$

$$B) \quad \frac{k}{m} \ll 39{,}47 \quad SI$$

$$C) \quad \frac{k}{m} = 9{,}5 \text{ à } 9{,}5.10^4 \; SI$$

$$D) \quad \frac{k}{2m} \ll 39{,}5 \quad SI$$

$$E) \quad \frac{k}{m} \gg 389 \; SI$$

Question 21) Que dire, à l'équilibre, de l'allongement du ressort soumis au seul poids de la masse *m* ?

$$\text{A)} \quad \Delta\ell \gg \frac{g}{2\pi\nu}$$

$$\text{B)} \quad \Delta\ell \gg \frac{g}{4\pi^2\nu^2}$$

$$\text{C)} \quad \Delta\ell \ll \frac{g}{4\pi^2\nu^2}$$

$$\text{D)} \quad \Delta\ell \ll \frac{g}{2\pi\nu}$$

$$\text{E)} \quad \Delta\ell \gg \frac{mg}{2\pi\nu}$$

Suspension de La Coste.

On définit un trièdre direct *Oxyz*. Dans le plan *Oyz*, on définit un axe *Oz'* tel que l'angle *(Oz,Oz')* = α soit constant. *P* est un point fixe de *Oz'*, on note *OP = d*. Dans le plan *Oyz*, une tige *OA* de longueur *l*, de masse négligeable peut tourner sans frottement autour de *Ox*. En *A* est fixé un disque homogène de masse *m* et de rayon *R*.

Un ressort sans masse, de raideur k, de longueur à vide nulle et assujetti à rester rectiligne relie le point P au point A (Figure 4).

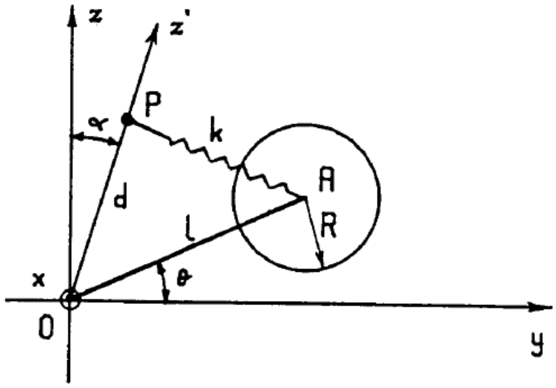


Figure 4

Question 22) Ecrire l'équation de l'équilibre du système.

$A)\ \ cos\theta(kdsin\alpha - mg) - kdsin\theta cos\alpha = 0$

$A)\ \ cos\theta(kdcos\alpha - mg) - kdsin\theta cos\alpha = 0$

$A)\ \ cos\theta(kdsin\alpha - mg) - kdsin\alpha cos\theta = 0$

$D)\ \ sin\theta(kdsin\alpha - mg) - kdsin\alpha cos\theta = 0$

$E)\ \ cos\theta(kdcos\alpha - mg) - kdsin\alpha cos\theta = 0$

Déterminer les valeurs de θ à l'équilibre du système ; on envisagera les deux possibilités :

Question 23) $\alpha = 0$ (lorsque θ n'est pas quelconque)

$A)\ \ \theta = \pm\pi$

$B)\ \ \theta = \pm\pi/4$

$C)\ \ \theta = \pm\pi/2$

$D)\ \ \theta = \pm\pi/3$

$E)\ \ \theta = \pm 2\pi$

Question 24) et $\alpha \neq 0$.

$$A)\quad \theta = Arctan\left(\frac{sin\alpha - \frac{kd}{mg}}{cos\alpha}\right)$$

$$B)\quad \theta = Arccos\left(\frac{sin\alpha - \frac{mg}{kd}}{cos\alpha}\right)$$

$$C)\quad \theta = Arctan\left(\frac{cos\alpha - \frac{kd}{mg}}{sin\alpha}\right)$$

$$D)\quad \theta = Arctan\left(\frac{sin\alpha - \frac{mg}{kd}}{cos\alpha}\right)$$

$$E)\quad \theta = Arctan\left(\frac{cos\alpha - \frac{mg}{kd}}{sin\alpha}\right)$$

On se limite au domaine : $\theta \in [-\pi/2\ ;\ \pi/2]$. On donne le moment d'inertie d'un disque homogène de masse m et de rayon R par rapport à son axe : $\frac{mR^2}{2}$.

Question 25) A quelle condition la position $\theta = 0$ est-elle une position d'équilibre ?

$$A)\quad \alpha = Arccos\left(\frac{mg}{kd}\right)$$

$$B)\quad \alpha = Arccos\left(\frac{kd}{mg}\right)$$

$$C)\quad \alpha = Arcsin\left(\frac{mg}{kd}\right)$$

$$D)\quad \alpha = Arcsin\left(\frac{kd}{mg}\right)$$

$$E)\quad \alpha = Arctan\left(\frac{mg}{kd}\right)$$

Question 26) Dans ce cas, quelle est la période des petites oscillations autour de $\theta = 0$?

$$A)\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell g cos\alpha}{\ell^2 + \frac{R^2}{2}}}$$

$$B)\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell g sin\alpha}{\ell^2 + \frac{R^2}{2}}}$$

$$C)\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^2 + \frac{R^2}{2}}{\ell g sin\alpha}}$$

$$D)\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^2 + \frac{R^2}{2}}{\ell g tan\alpha}}$$

$$E)\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^2 + \frac{R^2}{2}}{\ell g cos\alpha}}$$

Question 27) Quelle valeur de α doit-on choisir pour avoir une période de 10s en prenant : *l = 20 cm* ; *R = 5 cm* et *g = 10 m.s*$^{-2}$?

$A)\quad \alpha = 0{,}81°$
$B)\quad \alpha = 0{,}22°$
$C)\quad \alpha = 0{,}32°$
$D)\quad \alpha = 0{,}47°$
$E)\quad \alpha = 0{,}68°$

Question 28) On envisage le cas où le disque est libre de tourner autour de l'axe *Ax* sans frottement. La période du mouvement est-elle changée, quelle est sa valeur ?

$$A)\quad T' = T$$

$$B)\quad T' = \frac{T}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{2\ell^2}}}$$

$$C)\quad T' = \frac{2T}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\ell^2}}}$$

$$D)\quad T' = \frac{T}{\sqrt{\ell^2 + \frac{R^2}{2}}}$$

$$B)\quad T' = \frac{2T}{\sqrt{\ell^2 + \frac{R^2}{2}}}$$

Frottement solide.

Les tremblements de terre peuvent apparaître lors du glissement de deux plaques tectoniques. On modélise

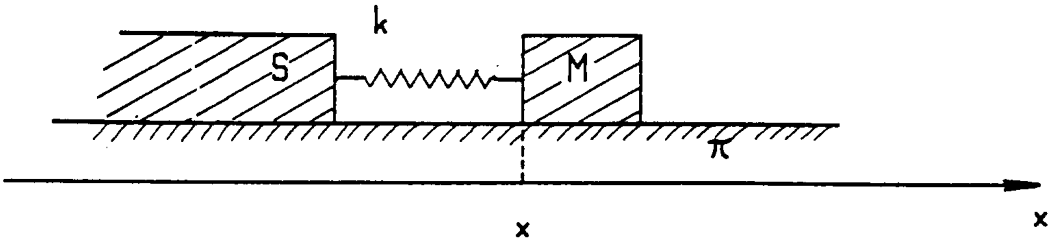


Figure 5

l'une des plaques par un plan solide fixe π, l'autre plaque est modélisée par un ensemble constitué d'une masse M reliée par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 à un support S mobile à la vitesse u constante suivant l'axe x (Figure 5). Le contact entre la masse M et le plan fixe peut être caractérisé par un coefficient de frottement de glissement statique f_o ou dynamique f avec $f < f_o$.

Question 29) Quelle propriété de la plaque mobile est modélisée par le ressort ?

$A)$ *Le ressort modelise le mouvement oscillatoire de la plaque mobile*
$B)$ *Le ressort modelise l'elasticité de la plaque mobile*
$C)$ *Le ressort modelise le glissement de la plaque mobile*
$D)$ *Le ressort modelise le mouvement plan de la plaque mobile*
$E)$ *Le ressort modelise le mouvement parabolique de la plaque mobile*

On suppose qu'à la date $t = 0$, l'abscisse du support S est nulle, la masse M est à l'abscisse ℓ_0 avec une vitesse nulle. On suppose de plus qu'à la date où M commence à glisser, le support ne vient pas en contact avec celui-ci.

Question 30) A quelle date t_0 commence le glissement de la masse M ?

$$A)\quad t_0 = \frac{f_0 M g}{ku} + \ell_0$$

$$B)\quad t_0 = \frac{f M g}{ku} + \ell_0$$

$$C)\quad t_0 = \frac{f M g}{ku}$$

$$D)\quad t_0 = \frac{f_0 M g}{ku}$$

$$E)\quad t_0 = \frac{f_0 \ell_0 M g}{ku}$$

Question 31) Déterminer l'allongement X du ressort lors du glissement de M.

$$A)\ X = x - \ell_0 - ut_0$$
$$B)\ X = x - \ell_0 - ut$$
$$C)\ X = x - \ell_0$$
$$D)\ X = ut - \ell_0$$
$$E)\ X = x - \ell_0 - u(t - t_0)$$

Question 32) Donner alors l'équation différentielle vérifiée par X.

$$A)\quad M\frac{d^2X}{dt^2} + kX = f_0 M g$$
$$B)\quad M\frac{d^2X}{dt^2} + kX = -(f_0 - f)Mg$$
$$C)\quad M\frac{d^2X}{dt^2} + kX = (f_0 - f)Mg$$
$$D)\quad M\frac{d^2X}{dt^2} + kX = fMg$$
$$E)\quad M\frac{d^2X}{dt^2} + kX = -fMg$$

Question 33) Quel est la forme $x(t)$ du mouvement de la masse M lors du glissement.

$$A)\quad x(t) = \ell_0 + \frac{fMg}{k} + ut - \frac{u}{\omega}coos\left[\omega(t - t_0) + \frac{\pi}{2}\right]\ avec\ \omega = \sqrt{k/_M}$$
$$B)\quad x(t) = \ell_0 - \frac{fMg}{k} - ut - \frac{u}{\omega}cos[\omega(t - t_0)]\ avec\ \omega = \sqrt{k/_M}$$
$$C)\quad x(t) = \ell_0 - \frac{fMg}{k} + ut - \frac{u}{\omega}sin[\omega(t - t_0)]\ avec\ \omega = \sqrt{k/_M}$$
$$D)\quad x(t) = \ell_0 - \frac{fMg}{k} + ut + \frac{u}{\omega}sin[\omega(t - t_0)]\ avec\ \omega = \sqrt{k/_M}$$

$$E)\quad x(t)=\ell_0+\frac{fMg}{k}-ut+\frac{u}{\omega}sin[\omega(t-t_0)]\ \ avec\ \ \omega=\sqrt{k/_M}$$

Que se passe-t-il dans les deux cas limites suivants :

Question 34) $k \to \infty$

$$A)\quad x(t)=\ell_0-ut-\frac{u}{\omega}$$
$$B)\quad x(t)=\ell_0+ut+\frac{u}{\omega}$$
$$C)\quad x(t)=\ell_0-ut+\frac{u}{\omega}$$
$$D)\quad x(t)=\ell_0+ut$$
$$E)\quad x(t)=\ell_0-ut$$

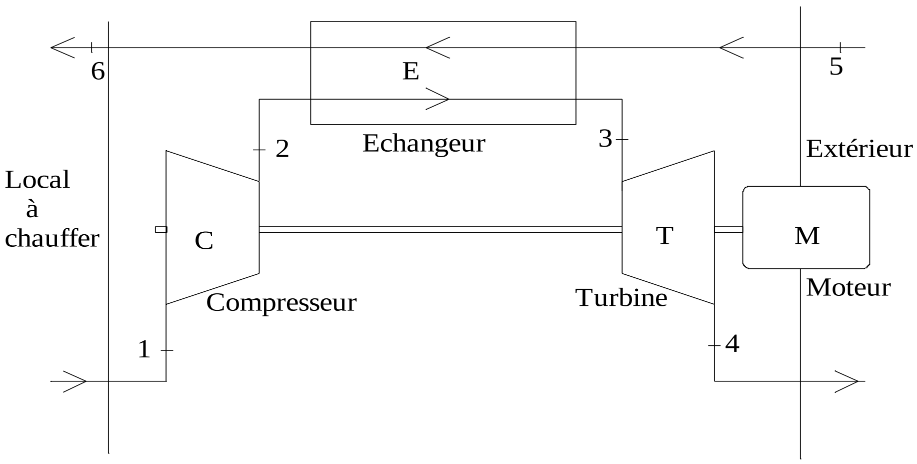
Question 35) $f = f_0$

$$A)\quad x(t)=\ell_0+\frac{u}{\omega}\left[\omega(t-t_0)-sin\big(\omega(t-t_0)\big)\right]$$
$$B)\quad x(t)=\ell_0-\frac{f_0Mg}{k}-ut-\frac{u}{\omega}sin[\omega(t-t_0)]$$
$$C)\quad x(t)=\ell_0-\frac{u}{\omega}\left[\omega(t-t_0)-sin\big(\omega(t-t_0)\big)\right]$$
$$D)\quad x(t)=\ell_0-\frac{f_0Mg}{k}-ut-\frac{u}{\omega}cos[\omega(t-t_0)]$$
$$E)\quad x(t)=\ell_0+\frac{f_0Mg}{k}+ut-\frac{u}{\omega}cos\left[\omega(t-t_0)+\frac{\pi}{2}\right]$$

THERMODYNAMIQUE

Partie I : Systèmes ouverts : Conditionneur d'air

L'installation schématisée ci-dessous a pour but de chauffer un local et d'en renouveler son contenu : l'air “ vicié ” du local est aspiré, comprimé dans le compresseur C (évolution 1-2), refroidi dans l'échangeur E (évolution 2-3), détendu dans la turbine T (évolution 3-4) et rejeté à l'extérieur. Afin de permettre le refroidissement de cet air dans l'échangeur E, on aspire de l'air neuf et froid, à l'extérieur, qui ainsi réchauffé dans E, est envoyé dans le local. Le moteur M et la turbine T entraînent le compresseur C.



Hypothèses générales :

- dans tout ce problème, on négligera les variations d'énergies cinétique et potentielle.
- on suppose que le débit massique d'air aspiré dans le local (en *l*) est égal à celui refoulé dans ce même local (en 6): on raisonnera donc pour une masse unitaire d'air.
- l'air sera assimilé à un gaz parfait défini par sa capacité thermique massique à pression constante, notée c_p, par sa capacité thermique massique à volume constant, notée c_v et par le rapport des capacités thermiques c_p/c_v, noté γ. On donne c_p=1 kJ.kg^{-1}.K^{-1} et γ = 1,40.
- l'évolution de l'air dans le compresseur et la turbine est adiabatique.

- l'évolution globale des deux flux dans l'échangeur est supposée adiabatique : l'échangeur est calorifugé.
- on négligera les pertes mécaniques dans les machines.

Données et notations :

- température extérieure : $T_5 = 0°C = 273$ K
- température minimale dans le local: $T_1 = 20°C$
- pression ambiante (dans le local et à l'extérieur): $p_1 = p_4 = p_5 = p_6 = 1$ bar $= 10^5$ Pa
- $\frac{p_2}{p_1}$ étant le taux de compression, on notera : $x = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)}$
- l'échangeur E est caractérisé par son pincement, noté ΔT, ainsi défini: $\Delta T = T_2 - T_6 = 20°C$

Etude théorique de l'installation : on suppose que toutes les évolutions sont *réversibles*.

Question 36. Etude de l'échangeur : donner une autre expression de ΔT :

$$A)\ \Delta T = T_5 - T_3$$
$$B)\ \Delta T = 2(T_3 - T_5)$$
$$C)\ \Delta T = T_3 - T_5$$
$$D)\ \Delta T = T_3 - T_4$$
$$E)\ \Delta T = T_3 - T_2$$

Donner l'expression littérale :

Question 37) du travail indiqué massique de compression, noté w_{ic}.

$$A)\ w_{ic} = c_p T_1 (\mathrm{x} - 1)$$
$$B)\ w_{ic} = c_\mathrm{v} T_1 (1 - \mathrm{x})$$
$$C)\ w_{ic} = c_p (T_1 - T_6)(\mathrm{x} - 1)$$
$$D)\ w_{ic} = c_\mathrm{v} (T_1 - T_6)(1 - \mathrm{x})$$
$$E)\ w_{ic} = c_p T_6 (\mathrm{x} - 1)$$

Question 38) du travail indiqué massique de détente, noté w_{it}.

$$A)\ w_{it} = c_p T_5 \left(\frac{1}{\mathrm{x}} - 1\right) = c_p (T_3 + \Delta T)\left(\frac{1}{\mathrm{x}} - 1\right)$$
$$B)\ w_{it} = c_\mathrm{v} T_5 \left(\frac{1}{\mathrm{x}} - 1\right) = c_\mathrm{v} (T_3 + \Delta T)\left(\frac{1}{\mathrm{x}} - 1\right)$$
$$C)\ w_{it} = c_p T_2 \left(\frac{1}{\mathrm{x}} - 1\right) = c_p (T_3 - \Delta T)\left(\frac{1}{\mathrm{x}} - 1\right)$$
$$D)\ w_{it} = c_\mathrm{v} T_3 \left(\frac{1}{\mathrm{x}} - 1\right) = c_\mathrm{v} (T_4 + \Delta T)\left(\frac{1}{\mathrm{x}} - 1\right)$$
$$E)\ w_{it} = c_p T_3 \left(\frac{1}{\mathrm{x}} - 1\right) = c_p (T_5 + \Delta T)\left(\frac{1}{\mathrm{x}} - 1\right)$$

Question 39) du travail massique fourni par le moteur, noté w_m.

$$A)\ w_m = c_\mathrm{v}\left[T_1(1 - \mathrm{x}) + (T_3 - \Delta T)\left(\frac{1}{\mathrm{x}} - 1\right)\right]$$
$$B)\ w_m = c_p\left[T_1(\mathrm{x} - 1) + (T_5 + \Delta T)\left(\frac{1}{\mathrm{x}} - 1\right)\right]$$
$$C)\ w_m = c_\mathrm{v}\left[T_1(1 - \mathrm{x}) + (T_4 + \Delta T)\left(\frac{1}{\mathrm{x}} - 1\right)\right]$$
$$D)\ w_m = c_p\left[T_6(\mathrm{x} - 1) + (T_3 - \Delta T)\left(\frac{1}{\mathrm{x}} - 1\right)\right]$$
$$E)\ w_m = c_p\left[(T_1 - T_6)(1 - \mathrm{x}) + (T_3 + \Delta T)\left(\frac{1}{\mathrm{x}} - 1\right)\right]$$

Question 40) de la température T_6.

$$A)\ T_6 = T_2 \mathrm{x} + \Delta T$$
$$B)\ T_6 = T_3 \mathrm{x} - \Delta T$$
$$C)\ T_6 = T_1 \mathrm{x} - \Delta T$$
$$D)\ T_6 = T_3 \mathrm{x} + \Delta T$$
$$E)\ T_6 = T_1 \mathrm{x} + \Delta T$$

Question 41) la quantité de chaleur massique fournie par l'air au local sera notée $Q_{1\text{-}6}$ et ainsi définie: $Q_{1\text{-}6} = h_6\text{-}h_1$.

$$A)\ \ Q_{1-6} = c_p[T_1(\mathrm{x}-1)+\Delta T]$$
$$B)\ \ Q_{1-6} = c_\mathrm{v}[T_1(1-\mathrm{x})+\Delta T]$$
$$C)\ \ Q_{1-6} = c_p[T_1(\mathrm{x}-1)-\Delta T]$$
$$D)\ \ Q_{1-6} = c_p[T_3(\mathrm{x}-1)+\Delta T]$$
$$E)\ \ Q_{1-6} = c_p[T_3(\mathrm{x}-1)-\Delta T]$$

On définit l'aptitude d'une telle installation à transformer de l'énergie mécanique en énergie calorifique, par le *coefficient d 'effet calorifique*, noté φ_c , ainsi défini : $\varphi_c = \dfrac{Q_{1-6}}{w_m}$.

Question 42) Donner l'expression littérale de φ_c.

$$A)\ \ \varphi_c = \frac{T_1(\mathrm{x}-1)-\Delta T}{T_6(\mathrm{x}-1)+(T_3-\Delta T)\left(\frac{1}{\mathrm{x}}-1\right)}$$
$$B)\ \ \varphi_c = \frac{T_3(\mathrm{x}-1)+\Delta T}{T_1(\mathrm{x}-1)+(T_5+\Delta T)\left(\frac{1}{\mathrm{x}}-1\right)}$$
$$C)\ \ \varphi_c = \frac{1}{\gamma}\frac{T_1(1-\mathrm{x})+\Delta T}{(T_1-T_6)(1-\mathrm{x})+(T_3+\Delta T)\left(\frac{1}{\mathrm{x}}-1\right)}$$
$$D)\ \ \varphi_c = \frac{T_1(\mathrm{x}-1)-\Delta T}{T_1(\mathrm{x}-1)+(T_5+\Delta T)\left(\frac{1}{\mathrm{x}}-1\right)}$$
$$E)\ \ \varphi_c = \gamma\frac{T_3(\mathrm{x}-1)+\Delta T}{T_1(1-\mathrm{x})+(T_4+\Delta T)\left(\frac{1}{\mathrm{x}}-1\right)}$$

Question 43) Application numérique : donner l'expression de la fonction φ_c = f(x) avec des coefficients numériques.

$$A)\ \ \varphi_c = \frac{\mathrm{x}^2-1{,}068\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2-2\mathrm{x}+1}$$
$$B)\ \ \varphi_c = \frac{\mathrm{x}^2+2{,}015\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+1}$$
$$C)\ \ \varphi_c = \frac{\mathrm{x}^2+1{,}068\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2-2\mathrm{x}+1}$$
$$D)\ \ \varphi_c = \frac{\mathrm{x}^2-2{,}674\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}-1}$$
$$E)\ \ \varphi_c = \frac{\mathrm{x}^2-3{,}132\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}-1}$$

Partie II : Transfert thermique

Un tube cylindrique creux de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e est constitué d'un matériau de conductivité thermique λ= 0,9 S.I. supposée indépendante de la température du matériau.

Question 44) Dans le système d'unités international (S.I.), la conductivité thermique λ s'exprime, en :

A) $J.K^{-1}.m^{-1}s^{-1}$

B) $J.K^{-1}.m^{-2}$

C) $J.K.m^{-1}s^{-1}$

D) $J.K.m^{-1}$

E) $J.K.m^{-1}s$

Les surfaces cylindriques intérieure et extérieure du tube sont respectivement aux températures T_i et $T_e < T_i$. Le tube est le siège d'un transport d'énergie interne (ou thermique) caractérisé par le vecteur $\overrightarrow{j_{th}}(r) = j_{th}(r)\overrightarrow{e_r}$ où $\overrightarrow{e_r}$

est un vecteur unitaire radial en un point P quelconque du matériau situé à une distance $R_i < r < R_e$ de l'axe du tube.

Question 45) Sachant qu'il n'existe aucun phénomène physique dans le matériau qui puisse donner lieu à une production d'énergie interne, montrer qu'en régime permanent on peut écrire :

$$A)\ j_{th}(r) = \frac{A}{r^2}$$

$$B)\ j_{th}(r) = \frac{A}{\ln r}$$

$$C)\ j_{th}(r) = \frac{A}{r}.$$

$$D)\ j_{th}(r) = A\ln r$$

$$E)\ j_{th}(r) = Ar^2$$

Question 46) Exprimer A.

$$A)\ A = \lambda \frac{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{(T_i - T_e)}$$

$$B)\ A = \lambda \frac{(T_i - T_e)}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}$$

$$C)\ A = \frac{(T_i - T_e)}{\lambda \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}$$

$$D)\ A = \frac{(T_i - T_e)}{\lambda \ln\left(\frac{R_e - R_i}{R_i}\right)}$$

$$E)\ A = \frac{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{\lambda(T_i - T_e)}$$

Question 47) Exprimer la loi d'évolution $T(r)$ de la température dans le matériau en fonction de la distance r à l'axe du tube.

$$A)\ T(r) = T_i + \frac{A}{\lambda}\ln\left(\frac{r}{R_e}\right)$$

$$B)\ T(r) = -T_i + \frac{A}{\lambda}\ln\left(\frac{r}{R_i}\right)$$

$$C)\ T(r) = T_i - \frac{A}{\lambda}\ln\left(\frac{R_e + r}{R_e + R_i}\right)$$

$$D)\ T(r) = T_i + \frac{A}{\lambda}\ln\left(\frac{R_i + r}{R_e + R_i}\right)$$

$$E)\quad T(r) = T_i - \frac{A}{\lambda}\ln\left(\frac{r}{R_i}\right)$$

Question 48) Exprimer la puissance thermique P_{th} échangée avec le milieu extérieur au niveau de la surface cylindrique extérieure par une longueur ℓ de matériau.

$$A)\ P_{th} = 2\pi \frac{\ell}{R_e} A$$

$$B)\ P_{th} = 2\pi \frac{\ell}{R_i} A$$

$$C)\quad P_{th} = 2\pi \ell A$$

$$D)\ P_{th} = 2\pi \frac{\ell}{R_e - R_i} A$$

$$E)\quad P_{th} = 2\pi \ell R_i A$$

Question 49) Exprimer la résistance thermique R_{th} d'une longueur *S.* de matériau.

$$A)\ R_{th} = \frac{2\pi}{\lambda \ell} \ln\left(\frac{R_e + R_i}{R_i}\right)$$

$$B)\ R_{th} = \frac{2\pi}{\lambda \ell} \ln\left(\frac{R_e + R_i}{R_e}\right)$$

$$C)\ R_{th} = \frac{1}{\lambda \ell} \ln\left(\frac{R_e}{R_i + R_e}\right)$$

$$D)\ R_{th} = \frac{1}{2\pi \lambda \ell} \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)$$

$$E)\ R_{th} = \frac{2\pi}{\lambda \ell} \ln\left(\frac{R_e}{R_i + R_e}\right)$$

Partie III : Thermodynamique statistique

Fonction de partition et description statistique de systèmes : Inversion de population

Le principe fondamental d'un laser repose sur l'émission stimulée de photons lors de la transition atomique entre deux niveaux d'énergie notés $E_1 = -\varepsilon$ et $E_2 = +\varepsilon$ (avec $\varepsilon > 0$) : on produit simultanément deux photons ayant les mêmes caractéristiques. Dans la suite, le système est composé de *N* atomes possédant ces deux niveaux énergétiques.

On donne :

Constante de Planck : h = 6,62.10^{-34} J.s ; célérité de lumière dans le vide c = 3.10^{8} m.s^{-1} et K_BT = 25 eV.

Question 50) Expliquer à l'aide d'un rapport de probabilités dans quel état on est susceptible de trouver le système à 1'équilibre thermodynamique à la température T.

$$A)\ \frac{P_2}{P_1} = e^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}} = e^{\frac{2\varepsilon}{k_B T}}, \qquad donc\ P_2 < P_1$$

$$B)\ \frac{P_2}{P_1} = e^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}} = e^{\frac{2\varepsilon}{k_B T}}, \qquad donc\ P_1 < P_2$$

$$C)\ \frac{P_2}{P_1} = e^{\frac{E_1 - E_2}{k_B T}} = e^{-\frac{2\varepsilon}{k_B T}}, \qquad donc\ P_2 < P_1$$

$$D)\ \frac{P_2}{P_1} = e^{\frac{E_1 - E_2}{k_B T}} = e^{-\frac{2\varepsilon}{k_B T}}, \qquad donc\ P_1 < P_2$$

$$E)\ \frac{P_1}{P_2} = e^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}} = e^{\frac{2\varepsilon}{k_B T}}, \qquad donc\ P_2 < P_1$$

Question 51) Donner en particulier un ordre de grandeur de $\frac{N_2}{N_1}$ pour une longueur d'onde de *500 nm*.

$$A)\ \frac{N_2}{N_1} = e^{\frac{E_1 - E_2}{k_B T}}; soit\ \frac{N_2}{N_1} \sim e^{+100} \sim 10^{44}$$

$$B)\ \frac{N_2}{N_1} = e^{\frac{2(E_2 - E_1)}{k_B T}}; soit\ \frac{N_2}{N_1} \sim e^{-200} \sim 10^{-88}$$

$$C)\ \frac{N_2}{N_1} = e^{\frac{2(E_1-E_2)}{k_BT}}; soit\ \frac{N_2}{N_1} \sim 100e^{+200} \sim 10^{88}$$
$$D)\ \frac{N_2}{N_1} = e^{\frac{E_2-E_1}{k_BT}}; soit\ \frac{N_2}{N_1} \sim e^{-100} \sim 10^{-44}$$
$$E)\ \frac{N_2}{N_1} = e^{\frac{E_2-E_1}{2k_BT}}; soit\ \frac{N_2}{N_1} \sim e^{-50} \sim 10^{-22}$$

Sachant que les deux phénomènes d'absorption d'un photon par un atome et d'émission stimulée s'opposent et sont gouvernés par les équations $\left.\frac{dN_1}{dt}\right|_{abs} = -\alpha N_1$ et $\left.\frac{dN_1}{dt}\right|_{spont} = +\alpha N_2$,

Question 52) expliquer en quoi le fonctionnement d'un laser doit reposer sur une « inversion de population ».

$$A)\ Il\ faut\ \left|\frac{dN_1}{dt}\right|_{abs} > \left|\frac{dN_1}{dt}\right|_{spont}\quad soit\ N_2 < N_1$$
$$B)\ Il\ faut\ \left|\frac{dN_1}{dt}\right|_{abs} < \left|\frac{dN_1}{dt}\right|_{spont}\quad soit\ N_2 > N_1$$
$$C)\ Il\ faut\ \left|\frac{dN_1}{dt}\right|_{abs} = \left|\frac{dN_1}{dt}\right|_{spont}\quad soit\ N_2 = N_1$$
$$D)\ Il\ faut\ \left|\frac{dN_1}{dt}\right|_{abs} = 2\left|\frac{dN_1}{dt}\right|_{spont}\quad soit\ N_2 = \frac{N_1}{2}$$
$$E)\ Il\ faut\ \left|\frac{dN_1}{dt}\right|_{abs} = \frac{1}{2}\left|\frac{dN_1}{dt}\right|_{spont}\quad soit\ N_2 = 2N_1$$

Question 53) Est-ce que cette condition est vérifiée ? Peut-on obtenir un laser à 1'équilibre thermodynamique ?

$A)$ *Cette condition est vérifiée et il faut se placer en équilibre pour obtenir un laser*
$B)$ *Cette condition n'est pas vérifiée et il faut se placer en équilibre pour obtenir un laser*
$C)$ *Cette condition n'est pas vérifiée et il faut se placer hord équilibre pour obtenir un laser*
$D)$ *Cette condition est vérifiée et il faut se placer hord équilibre pour obtenir un laser*
$E)$ *Les questions précédentes ne permettent pas de reondre convenablemnt*

Question 54) Calculer la fonction de partition associée à ce système à deux niveaux.

$$A)\ Z = 1 + e^{\frac{\varepsilon}{k_BT}}$$
$$B)\ Z = 1 + e^{-\frac{\varepsilon}{k_BT}}$$
$$C)\ Z = e^{\frac{\varepsilon}{2k_BT}} + e^{-\frac{\varepsilon}{2k_BT}}$$
$$D)\ Z = e^{\frac{2\varepsilon}{k_BT}} + e^{-\frac{2\varepsilon}{k_BT}}$$
$$E)\ Z = e^{-\frac{\varepsilon}{k_BT}} + e^{\frac{\varepsilon}{k_BT}}$$

Question 55) En déduire les populations.

$$A)\ N_1 = \frac{Z}{N}e^{\frac{\varepsilon}{k_BT}}\ et\ N_2 = \frac{Z}{N}e^{-\frac{\varepsilon}{k_BT}}$$
$$B)\ N_1 = \frac{N}{Z}e^{\frac{\varepsilon}{k_BT}}\ et\ N_2 = \frac{N}{Z}e^{-\frac{\varepsilon}{k_BT}}$$
$$C)\ N_1 = \frac{N}{Z}e^{\frac{2\varepsilon}{k_BT}}\ et\ N_2 = \frac{N}{Z}e^{-\frac{2\varepsilon}{k_BT}}$$
$$D)\ N_1 = \frac{N}{Z}e^{\frac{\varepsilon}{2k_BT}}\ et\ N_2 = \frac{N}{Z}e^{-\frac{\varepsilon}{2k_BT}}$$
$$E)\ N_1 = \frac{Z}{N}e^{\frac{\varepsilon}{2k_BT}}\ et\ N_2 = \frac{Z}{N}e^{-\frac{\varepsilon}{2k_BT}}$$